1 | Augen zu und durch!

Gegeben ist das folgende reelle lineare Gleichungssystem mit Unbestimmten $x_1, \ldots, x_6$ und einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
3x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & + & 15x_6 & = & 6t+18 \\
-x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & - & 9x_6 & = & -t-4 \\
-2x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 6x_5 & - & 18x_6 & = & -2 \\
4x_2 & - & 12x_3 & + & 8x_4 & - & 12x_5 & + & 36x_6 & = & 8t+28
\end{array}$$

(a) Bringen Sie die Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, den Lösungsraum. Geben Sie dabei auch eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

(a)

SCHRITT 1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 3 & -9 & 6 & -6 & 15 & 6t+18 \\
0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\
0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\
0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28
\end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\
0 & -1 & 3 & -2 & 3 & -9 & -t-4 \\
0 & -2 & 6 & -4 & 6 & -18 & -2 \\
0 & 4 & -12 & 8 & -12 & 36 & 8t+28
\end{array}\right) \quad + \quad +2 \quad -4$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & t+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 4t+10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 16 & 4
\end{array}\right) \quad -2 \quad +4$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t+12 \end{array}\right)$$

4P für ZSF

(Pivot-Elemente müssen in ZSF auch nicht 1 sein; gefordert wird nur dass sie ungleich 0 sind.)

(b) Aus (a) folgt: $4t+12=0 \iff t=-3$

$$\mathcal{L}(A,\underline{b}) \neq \emptyset \iff \begin{cases} 2t+6=0 \\ \wedge\ 4t+12=0 \end{cases} \iff t=-3.$$

1P

(c) Falls $t=-3$:

SCHRITT 2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \rfloor +2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{array}\right)$$

SCHRITT 3:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \end{array}\right)$$

SCHRITT 4:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
\tilde{a}_1 & & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & \tilde{a}_4 & \tilde{\underline{b}} \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\mathcal{L}(A,\underline{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von } \mathcal{L}(A)} \right\rangle
$$

3 P für $\mathcal{L}(A)$

+ 1 P für Basis von $\mathcal{L}(A)$

+ 1 P für $\mathcal{L}(A,b)$

(jeweils −0,5P je Rechenfehler)

2 | Bitte wenden!

Welchen Rang haben die folgenden Matrizen? Bestimmen Sie zu allen Matrizen von vollem Rang die Inversen!

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rk } A = 1$$

1P

B:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$B^{-1} = B$$

1P

C:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rk } C = 2$$

2P

$$D: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad +2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad -\frac{1}{2} \quad +1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\operatorname{rk} D = 3, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2P

2P

$$E: \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} E = 1$$

2 P

(jeweils −0,5 P je Rechenfehler)